

BOLA

重力場推進宇宙機

野田篤司

平成5年 5月 22日

Abstract

「推進を一切使わない宇宙空間での推進方法はないものか。」宇宙開発にかかわる者なら誰でも、そんなことを望んだことがあるだろう。それほど、宇宙機に搭載する推進量による軌道制御の制限の壁は大きいのである。

ロケット推進の応用では、いかに効率を改善しても、原理的な限度がある。そこで、根本的に原理を改める研究が従来からあった。それらは、推進を噴射する代わりに、太陽光を反射したり、重力に働きかけている。

しかし、これらのアイデアの多くは、現実的でないもの、科学的な裏付けのないものである。特に、重力を使用したものでは、ほとんどが訳の判らない理論で説明されているにすぎない。唯一、現実的なものは、惑星などをかすめるスイングバイであるが、これは一度に大きな制御量を得られる代わりに、連続的な制御ができないなどの制限を持つ。

私が本論文で紹介する BOLA と名付けた重力を用いる推進方法は、連続的な軌道制御を行えるものである。もちろん、軌道を変えるためのエネルギーは必要であるが、これに太陽電池等を用いることで、半永久的な軌道制御ができる。ただし、BOLA は、一度に大きな推進力を発生できないので、地上からの打ち上げには使用できず、軌道上での制御にのみ有効である。

一般的な人工衛星や宇宙ステーションは、PROPELLANT の補給を行わないと、所定の軌道から外れたり地上に落ちてきたりする。しかし、BOLA を応用した人工衛星や宇宙ステーションならば、半永久的に宇宙空間に留まることが可能である。

目次

1	まえがき	2
2	本論	3
2.1	本論文で提案する推進方法	3
2.1.1	BOLA の構成	3
2.1.2	BOLA の運用方法	4
2.2	BOLA の原理	4
2.3	検証	5
2.3.1	検証の方法	5
2.3.2	検証の結果	6
2.4	結論	6
3	むすび	6
A	付録	8
A.1	付録で使用する記号の定義	8
A.2	BOLA が中心星に回転力を与える原理	9

A.3 BOLA の軌道上昇	10
A.4 BOLA の自転速度制御	11
A.5 エネルギーの授受	12
A.6 近似式による概算とシミュレーション結果の比較	12

1 まえがき

本論文は、宇宙機の新しい軌道制御の方法を紹介するものである。

人工衛星や宇宙船、宇宙ステーションといった宇宙機は、中心星を回る軌道にある。宇宙機の多くは、所定の軌道に入り、その軌道を保持するために、加速・減速といった軌道制御が必要である。

あらゆる物体が加速や減速を行うとき、その物体以外の質量に力を加える必要がある¹。力を加えた反動が加速度を生む。これは、「作用・反作用の法則」、すなわち「運動量の保存則」として知られる。

地球上の場合、力を加える質量を得ることは容易である。人が歩くとき、その質量は地球である。人は足で地面、つまり地球に力を加え、その反作用で前進する。同様に、魚は水を、鳥は空気を用いる。一見、宇宙機と良く似ているジェット機も、周りの空気をファンで後方に押し出し、その反動で加速度を得る。

しかし、ほとんど真空の宇宙では、この質量を得ることは困難である。従来のロケット推進は、この質量として、PROPELLANT(≒推進剤)を予め搭載している。宇宙機は、これを熱や電気エネルギー等で噴射し、その反動で加速度を得る。²

しかし、一度噴射したPROPELLANTの再利用や補給は困難である。このため、最初に搭載したPROPELLANTの量が軌道制御の総量を制限し、引いては宇宙機自体の寿命まで決定することも多い。推進剤が無くなり、地上に落ちた人工衛星や宇宙ステーションのニュースは多くの方が記憶にあるだろう。

このような制限を避ける研究は、従来から行われている。パイオニアやボイジャー等の惑星探査機が、惑星をかすめスイングバイする軌道制御は従来から使用されている。この場合、スイングバイする惑星に引力で力を伝え、その反作用で加速度を得る。この軌道制御は、一度に大きな制御ができる代わりに、連続的な制御ができないなど、制約が多い。このほか、質量の代わりに光を用いた光子ロケットや光ヨット、PROPELLANTを宇宙空間から集めるバザー・ドラムジェットなどの推進方法が提案されているが、いずれも実現してはいない。

本論文で紹介する軌道制御の方法は、重力を通じて、中心星に力を加え、その反作用で軌道制御を行うものである。この方法では、力を加える対象が常時利用可能なため、軌道制御の総量の制限は存在しない。もちろん、軌道制御のためのエネルギーは要するが、必要なものは純粋なエネルギーのみであり、余分な質量は伴わない。従って、太陽電池といった宇宙空間で得やすいエネルギー発生源を用いることで、半永久的に軌道制御を行うことができる。

本論文の方法では、宇宙機の本体を2つの部分に分け、その間をごく細い綱で結ぶ形状にする。このような宇宙機の形態は、一般的にテザーとして知られているが、従来からのテザーとの違いは、宇宙機自体を軌道回転の2倍の速度で回転させることにある。この回転が、偏平等による重力場の不均衡から中心星に力を加え、その反動で推進力を得る。

外見の特徴から、この宇宙機を「BOLA」(ボーラ)と名付けた。BOLAとは2個の鉄丸が両端に付いた投げ縄のことで、南米の現地人やガウチョが獣の脚に投げつけ、からませて捕まえる道具である。

なお、従来から提案されていたテザー利用の軌道制御に、回転しないテザー³の綱を伸ばすことで上方部

¹本文での記述は、理解のためにニュートン力学の範囲に限定している。厳密には「物体が運動量を変えるとき、その物体以外の運動量を変化させる必要がある。」となる。この記述ならば、光子のように質量を持たないが、運動量を持つものも対象とすることができる。

²PROPELLANTは宇宙機内に搭載されているため、「あらゆる物体が加速や減速を行うとき、その物体以外の質量に力を加える必要がある。」という記述に矛盾するようである。しかし、PROPELLANTは噴射された後、宇宙機外の質量になるので、宇宙機が「宇宙機以外の質量」に力を加えたことになる。

³正確には軌道と自転の回転速度が一致しているため、回転座標系では止まっているように見えるだけのテザー

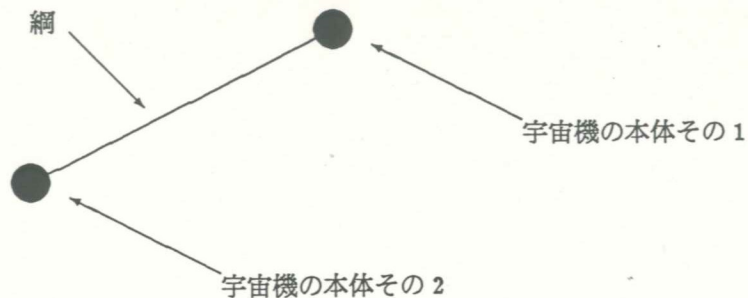


図 1: BOLA の構成

分の軌道高度を上げる方法がある。しかし、この方法では、他の質量に力を加ず、宇宙機の運動量を変えることが無いため、制御と呼べるかどうか、疑問である。⁴

本論文では、まず、BOLAに必要な宇宙機の構成と運用方法を示し、次に、原理概念を説明する。その後、理論の検証と効果の定量的な確認のために行ったコンピュータシミュレーションについて、その結果と結論を述べる。また、付録に理論の詳細な説明と軌道制御の概算を計算する近似式を示す。

2 本論

2.1 本論文で提案する推進方法

BOLAの必要な構造と運用方法を2.1.1と2.1.2に示すが、これらを考慮する上で、現在の技術を考慮して、実現性のあるものを選んでいく。

仮に、非現実的な技術を使用できれば、重力を利用した推進方法は意外と容易に実現できる。例えば宇宙機を数百 km におよぶ巨大な構造物で構成したり、巨大な質量を光速に近い速度で回転させることが可能であれば、簡単に重力を利用した軌道制御を行うことができる。それどころか、数万 km の構造体が地球の重力下で自重に耐えられることができれば、“空飛ぶ円盤”のように地表面に静止した状態から浮上し、軌道速度までの加速をエネルギー効率 100%で行う重力を媒体とした推進方法すら、ニュートン力学の応用だけで可能である。⁵

しかし、ここでは、そのような非現実的な構成の宇宙船ではなく、実現の可能性のあるように考察した。その結果、BOLAは、全長こそ数百 km に及ぶが、その間は細い綱を張るという構成である。

2.1.1 BOLA の構成

BOLAの構成の概念を図1に示す。BOLAの本体は図のように2つの部分に分かれ、その間を細い綱が結んでいる。2つの本体には、荷物と共に、綱の張力を制御し、長さを伸縮させるための機器が内蔵されている。その機器とは、綱を巻き取るためのリール、駆動のためのモーターと、そのエネルギー発生源及び、張力を制御するための電子機器で構成される。なお、エネルギー源に関しては、特に制限はなく、化学反応を用いた電池や発電機、太陽電池、原子力電池等のいずれでもよい。

2つの本体を結ぶ綱の長さや質量は、宇宙機の制御量を左右するので、可能な限り、長く細く軽いものを選ぶ必要がある。

⁴このほかにテザーに電流を流して軌道を変える提案があるが、これは軌道制御であるといえる。ただし、力の伝達に、媒体に重力ではなく磁力を使っている。

⁵トンチのようなモノである。頭の体操と思ってバカげたものを考えてみて欲しい。

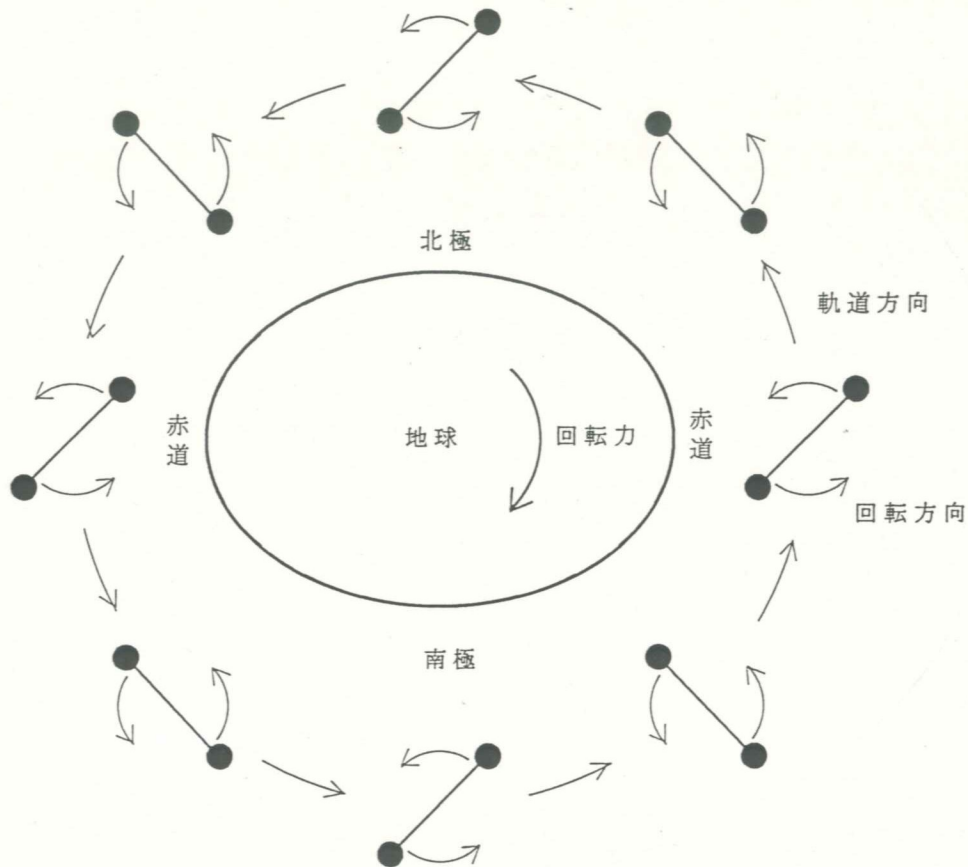


図 2: BOLA の運用 (軌道高度上昇時)

2.1.2 BOLA の運用方法

BOLA の運用は、宇宙機の自転速度を軌道回転の 2 倍にし、さらに回転の位相差⁶を一定に保持することが基本である。地球の扁平による重力不均衡を利用した軌道高度上昇の制御例を図 2 に示す。この図では、中心星の扁平による重力不均衡を最も効率的に利用する極軌道の例をとっており、軌道回転と自転の同期を示している。

この図は高度の上昇を行う軌道制御を示しているが、位相差 ψ を変えることで、降下の制御を行うことも可能である。高度の上昇率は $\sin 2\psi$ に比例し、 $\psi = \pi/4$ で最大の上昇制御、 $\psi = -\pi/4$ で最大の降下制御、 $\psi = 0$ で推進の効果の無い制御を行う。

また、軌道回転と自転の同期のために、網の伸縮制御を宇宙機が能動的に行う。

2.2 BOLA の原理

この節では、BOLA の原理について、概念的な説明を行う。なお、原理の詳細な説明については、付録を参照してもらいたい。

まず、運動量について、考察する。宇宙機と中心星のみで構成された系に関しては、加わる力は互いの引力と網の張力のみである。つまり、系外からの力はないため、この系の持つ運動量は保存される。

系の運動量が保存されることは、次の 2 つの現象を示す。

- 系の重心の速度は不変である。
- 系の角運動量は保存される。

⁶位相差 ψ は、付録 A.1 で定義している。

前者の現象については、軌道制御に関しては、特に問題とはならない。このことは、系の重心の速度が変化しなくても、軌道半径を変える軌道制御は可能であることから分かる。

しかし、後者の現象については、さらに検討が必要である。系の持つ角運動量とは次の3つの角運動量の合計である。

- 軌道の持つ角運動量（宇宙機と中心星が、系の重心を中心に互いにまわる角運動量）
- 中心星の自転の角運動量
- 宇宙機の自転の角運動量

このうち、最初の軌道の持つ角運動量は、軌道制御により軌道半径が変わると、変化する。しかし、系全体の角運動量是不変のため、この軌道の持つ角運動量の変化分をいかにして、補充するかが最大の問題となる。従来のロケットを用いた軌道制御では、PROPELLANTを噴射することで、この問題を解決している。BOLAでは、中心星の自転の角運動量を変化させ、軌道の持つ角運動量の変化分を補充している。⁷

地球を始め、多くの天体は完全な球体ではなく、図2のように赤道方向に扁平した回転楕円体の形状をしている。このため、赤道上では重力が強く、極上では重力が弱いという不均衡が生じる。2.1.2節で示した運用を行うと、BOLAは重力の不均衡によって、図2に示すような回転力を中心星に与える⁸。この図は、左回りを正としているので、中心星の受ける回転力は、負である。従って、中心星の持つ角運動量は減少し、軌道と宇宙機の自転の持つ角運動量の合計は増加する。

BOLAは、綱の長さを正弦波状に制御し、軌道回転と宇宙機自転の同期性を保つ。従って、宇宙機の回転速度と角運動量是不変であり⁹、軌道の持つ角運動量のみが増加し、軌道半径が大きくなる。¹⁰

綱の長さを制御することは、同期性を保つとともに、力学的な系にエネルギーを与えることになる。この原理は公園のブランコをこぐことと同じで、中心星からの潮汐力により、張力が強いときに綱を縮め、張力が強いときに綱を延ばす。¹¹

このようにして、BOLAから、力学的な系に与えられたエネルギーは、ほぼ100%の効率で軌道制御に使われる。¹²

2.3 検証

前章までに、BOLAの原理について示したが、この検証を行うために、コンピュータによるシミュレーションを実施した。

2.3.1 検証の方法

客観的な検証を行うために、次のようにシミュレーションを構築した。宇宙機は2つの質点とし、それらにかかる力を、中心星からの引力と綱の張力のみ限定した。この力から、質点の運動について、微分方程式を導き、数値計算により、宇宙機の運動を求めた。

このとき、張力のみが、宇宙機から自由に制御できる唯一のパラメータとしている。

シミュレーションを実施するに当たり、中心星は地球を扁平率¹³まで模擬したモデルとし、極軌道について、解析している。ただし、中心星以外の天体の引力、大気抵抗および綱の質量・弾性は無視し、中心星の質量および慣性モーメントは、宇宙機の無限大倍としている。

⁷系内には、この他にBOLA自身の回転による角運動量があり、これと軌道回転の角運動量との交換の可能性がある。しかし、BOLAの持つ慣性モーメントの大きさを考えると実用的な高度変化の軌道制御には向かない。だが、この方法は離心率の制御には有効である。

⁸回転力の発生するメカニズムについては付録A.2を参照のこと

⁹正確には、軌道上昇の伴い、自転速度と角運動量は共に僅かに減少する。

¹⁰軌道半径が大きくなる原理は、付録A.3を参照のこと

¹¹自転速度の制御については、付録A.4を参照のこと

¹²エネルギーの授受については、付録A.5を参照のこと

¹³いわゆる J_2 項までシミュレーションしている。

2.3.2 検証の結果

シミュレーションの結果を図3から図5に示す。

図3は、軌道長半径7000km¹⁴の極軌道で、網の長さを100kmとし、位相差 $\psi = \pi/4$ の場合の高度の変化を示している。図では、昇交点、降交点、北極及び南極での宇宙機の重心位置の地心からの距離の変化を示している。昇交点と降交点の地心からの距離はほぼ同じなので、重なっている。同様に、北極と南極での地心からの距離も重なっている。なお、図中、上の線が昇交点及び降交点時で、下の線が北極及び南極である。

この結果から、1日当たり約338mの高度上昇が、連続して起こることが確認できる。また、この時、宇宙機の自転速度などが不要な増加を示さないことを確認し、網にかかる張力は、宇宙機の総質量が1000kgとすると最大約280Nであり、網の長さの制御量は最大約±140mである。

図4は、網の長さや高度の制御の効果を示すもので、軌道長半径7000kmの極軌道で、位相差 $\psi = \pi/4$ の場合の一日当たりの高度の変化率を示している。この図からは、網の長さの自乗に比例した軌道制御量の効果があることが判る。

図5は、位相差の効果を示すもので、軌道長半径7000kmの極軌道で、網の長さを100kmとした場合の一日当たりの高度の変化率を示している。この図から位相差 ψ に対して、 $\sin 2\psi$ の軌道制御の効果があることが、シミュレーションの結果に表れている。

以上の結果や定量的な傾向は、いずれもBOLAの原理から導いた近似と良く一致する¹⁵。また、各シミュレーション実行時に、網にたるみのないことも確認している。

2.4 結論

BOLAの原理に矛盾が無いことは、コンピュータ・シミュレーションによる解析によって、確認した。しかし、その効果は、100kmという長大な宇宙機を用いても、地球の低軌道で、1日当たり僅か数百mの軌道制御が行えるに過ぎない。

それでも、この程度の効果で、大気抵抗による降下から、宇宙機の軌道を保持するなど、実用的な軌道制御を行える可能性がある。

ただし、今後の課題が数多く残っている。まず、高度制御以外にも、面外制御などの検討が必要である。また、網の材質や質量・弾性を考慮した解析や、網の展開法、他の宇宙機への影響を検討する必要がある。その他、月や太陽の潮汐力を利用する応用も考えられ、これにより、高軌道でも使用できる可能性がある。

3 むすび

本論文で、BOLAと名付けた重力を用いた軌道制御の方法を紹介した。現在の解析結果を利用するだけでも、十分に低軌道の宇宙機の軌道の保持を行うことができる。BOLAは、PROPELLANTが不必要であり、エネルギー源に太陽電池等を利用すれば、完全に独立した宇宙機が半永久的に軌道保持を行うことが可能である。一般的な人工衛星や宇宙ステーションは、PROPELLANTの補給を行わないと、所定の軌道から外れたり地上に落ちてきたりする。しかし、BOLAを応用した人工衛星や宇宙ステーションならば、半永久的に宇宙空間に留まることが可能である。

現段階では、BOLAは未解決な部分や検討すべき点も多く、この推進方式を使った宇宙機を実現のものにするためには、さらに研究を進める必要がある。

しかし、今後の解析などを進めて、BOLAの実現の可能性を探り、さらには、この推進システムを応用した宇宙機の実現を目指したいと考えている。

¹⁴ 高度にすると約620km

¹⁵ 詳細は付録A.6参照

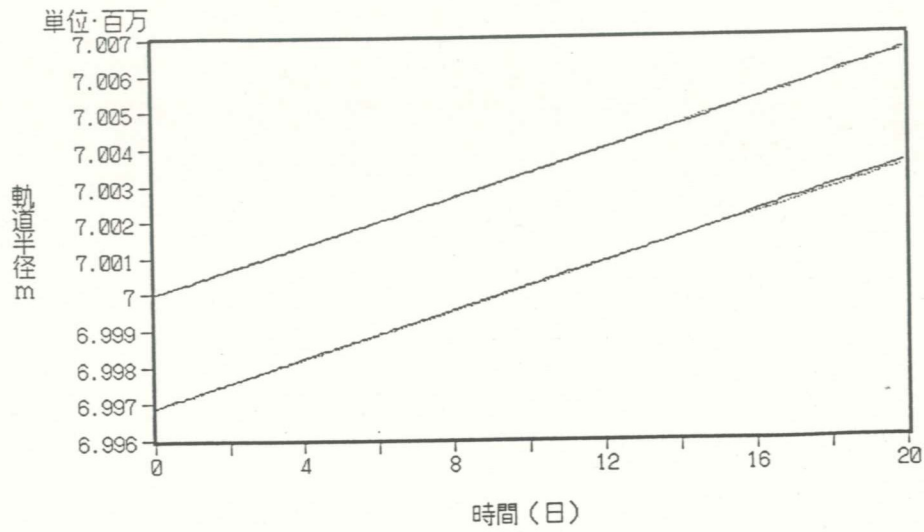


図 3: 時間と高度の変化の関係

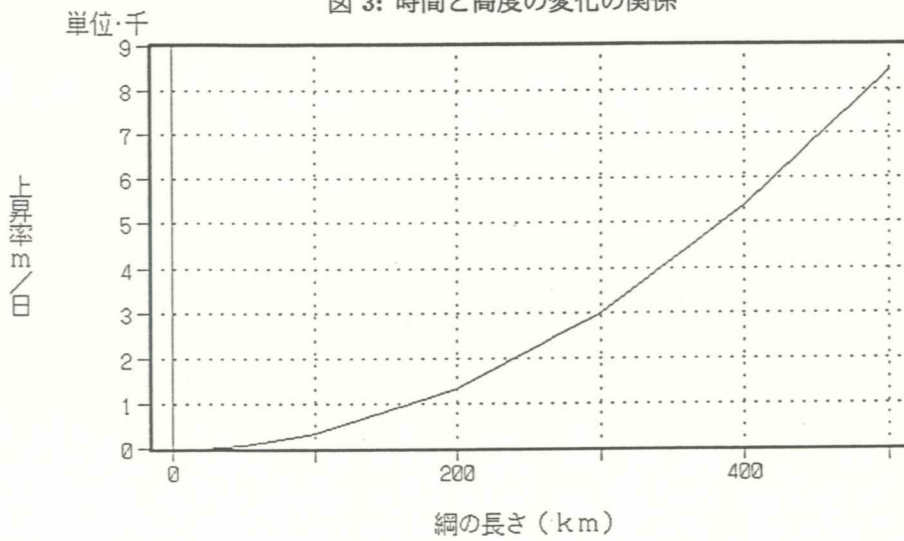


図 4: 網の長さ と高度の変化の関係

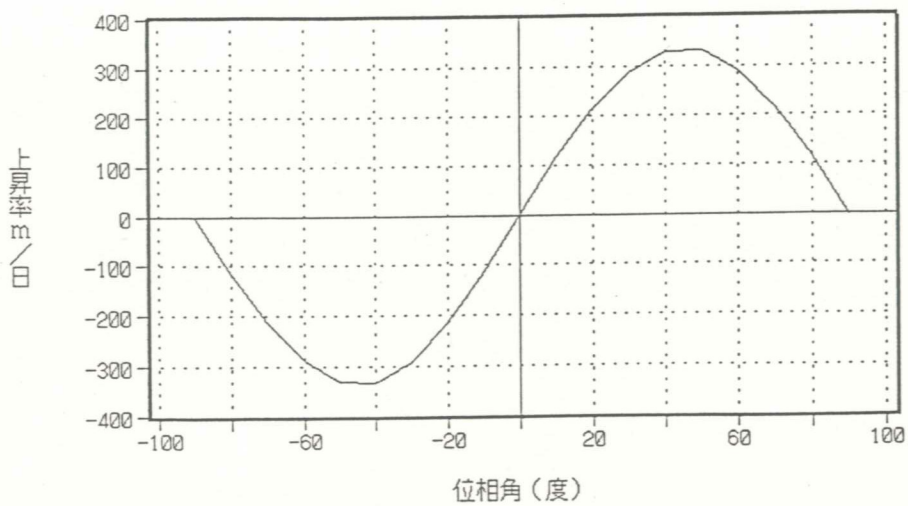


図 5: 位相差と高度の変化の関係

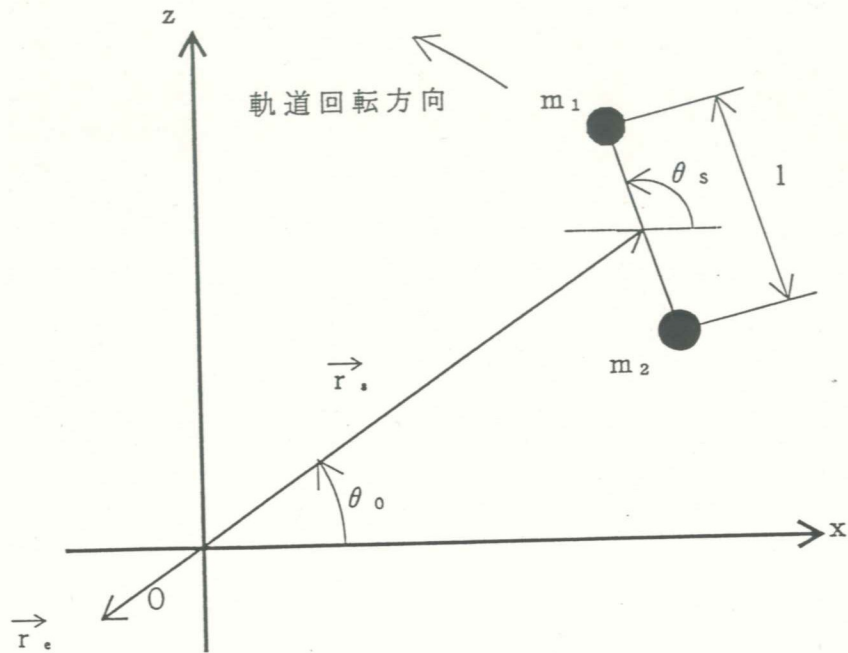


図 6: 付録で使用する変数

A 付録

A.1 付録で使用する記号の定義

付録で共通に使用する記号は以下のように、定義している。

一般的なもの

G : 万有引力定数

a_e : 中心星の赤道半径

I_C : 中心星の y 軸回りの慣性モーメント

m : 対象となる質点の質量 (一般)

M : 中心星の質量

J_2 : 中心星の扁平による重力の影響

ω_C : 中心星の y 軸回りの自転速度

\vec{r} : 対象となる座標

ただし、

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

であり、この時、原点は系の重心であり、 z 軸は北極方向になる。

BOLA に関連するものを次にあげるが、図 6 に、変数の定義の概念を示す。図でも示されるように、BOLA は極軌道で、軌道面は xz 平面上にあり、昇交点方向は $+x$ 方向である。

\vec{r}_e : 中心星の重心の位置

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_m - \vec{r}_e$$

\vec{r}_1 : 宇宙機本体 1 の位置

m_1 : 本体 1 の質量

θ_0 : 宇宙機の重心の方向

ϕ : 網と地球方向のなす角度 ($= \theta_S - \theta_0$)

\vec{l} : 本体 2 から本体 1 へのベクトル ($= \vec{r}_1 - \vec{r}_2$)

T_0 : 軌道周期

a : 宇宙機の軌道長半径

\vec{r}_m : 宇宙機の重心の位置

$$r_0 = |\vec{r}_0|$$

\vec{r}_2 : 宇宙機本体 2 の位置

m_2 : 本体 2 の質量 ($= m_1$)

θ_S : 本体 2 から本体 1 の方向

ψ : 軌道と宇宙機の姿勢の位相差 ($= \phi - \theta_0$)

l : 網の長さ ($= |\vec{l}|$)

$$(m_1 + m_2)\vec{r}_m + M\vec{r}_e = 0$$

e : 宇宙機の離心率

ただし、 a と e は、系の重心ではなく、中心星の重心を中心とした宇宙機の軌道長半径と離心率であり、また、網の質量は無視できるものとしている。

A.2 BOLA が中心星に回転力を与える原理

BOLA が図 2 で示すような運用を行う時、中心星の偏平による重力の不均衡から、宇宙機は中心星に回転力を与える。この原理を示す。

まず、

$$\begin{aligned} \vec{r}_g &= \vec{r} - \vec{r}_e \\ &= \begin{bmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \end{bmatrix} \end{aligned}$$

とした場合、 J_2 項まで考慮した中心星による重力ポテンシャル $= U(\vec{r}_g)$ は次の式で表される。

$$U(\vec{r}_g) = -\frac{GM}{|\vec{r}_g|} \left\{ 1 + \left(\frac{a_e}{|\vec{r}_g|} \right)^2 \frac{1}{2} \frac{\vec{r}_g^T}{|\vec{r}_g|} B \frac{\vec{r}_g}{|\vec{r}_g|} \right\}$$

ただし、 B は

$$B = \begin{bmatrix} J_2 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & -2J_2 \end{bmatrix}$$

である。

中心星の重力が \vec{r} に存在する質点 m に及ぼす力 $\vec{f}(\vec{r}_g)$ は

$$\begin{aligned} \vec{f}(\vec{r}_g) &= m \left(\frac{dU(\vec{r}_g)}{d\vec{r}_g} \right)^T \\ &= -\frac{GmM}{|\vec{r}_g|^3} \left[\vec{r}_g - \frac{a_e^2 J_2}{|\vec{r}_g|^2} \left\{ \frac{-5(x_g^2 + y_g^2 - 2z_g^2)}{2|\vec{r}_g|^2} \vec{r}_g + \begin{bmatrix} x_g \\ y_g \\ -2z_g \end{bmatrix} \right\} \right] \end{aligned}$$

である。

質点 m に及ぼす力の反作用として、中心星に加わるトルク $\vec{T}(\vec{r}_g)$ は

$$\vec{T}(\vec{r}_g) = -(\vec{f}(\vec{r}_g) \times \vec{r}_g)$$

になる。なお、ベクトルの \times は、外積を示す。

中心星にかかるトルクの宇宙機の軌道1周回の平均 \bar{T} は

$$\bar{T} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left\{ \vec{T}(\vec{r}_1 - \vec{r}_e) + \vec{T}(\vec{r}_2 - \vec{r}_e) \right\} dt$$

となる。

この式に、角速度と軌道半径 r_0 と綱の長さ l の変動が無視できるほど小さい等の仮定をおいた結果、

$$\bar{T} \cong \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{45GMm_1a^2J_2l^2}{16r_0^3} \sin 2\psi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

との近似式が得られる。

A.3 BOLA の軌道上昇

宇宙機の軌道の持つ力学的な性質として、角運動量の保存について考察する。

角運動量の保存則は、 y 軸まわりに注目すると、

$$\begin{aligned} y\text{軸まわりの角運動量} &= \text{軌道回転の } y\text{軸まわりの角運動量} \\ &+ \text{宇宙機の自転の } y\text{軸まわりの角運動量} \\ &+ \text{中心星の } y\text{軸まわりの角運動量} \\ &= \frac{(2m_1M)r_0^2}{2m_1+M} \frac{d\theta_0}{dt} + \frac{m_1l^2}{2} \frac{d\theta_S}{dt} + I_C\omega_C \\ &= \text{一定} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\text{角運動量}) &= \frac{(2m_1M)r_0^2}{2m_1+M} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta_0}{dt} \right) + \frac{m_1l^2}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta_S}{dt} \right) + I_C \frac{d}{dt} (\omega_C) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。

また、

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_S}{dt} &= 2 \frac{d\theta_0}{dt} \\ \frac{d\theta_0}{dt} &= \frac{1}{r_0^2} \sqrt{G(2m_1+M)(1-e^2)a^3} \\ \frac{da}{dt} &= 2a \left\{ (1-e^2) \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta_0}{dt} \right)}{\frac{d\theta_0}{dt}} + 2e \frac{de}{dt} \right\} \\ \frac{d}{dt} \omega_C &= \frac{T_y}{I_C} \end{aligned}$$

であり、これらの式と式1から、さらに $l \ll r_0$ 、 $m_1 \ll M$ と円軌道として $e=0$ 、 $a=r_0$ とすると、

$$\frac{da}{dt} \cong \frac{45\sqrt{GM}a_e^2J_2l^2}{16r_0^{9/2}} \sin 2\psi \quad (2)$$

という結果が得られる。

A.4 BOLA の自転速度制御

潮汐力による自転速度の制御を説明する。BOLA は綱の張力を調整し、長さを変えて、宇宙機の自転速度を制御する。自転を増速する時、中心星からの潮汐力によって張力が強いときに、綱を縮め、逆に張力が弱いときに綱を延ばす。これを繰り返すと、BOLA の自転の角運動量を増し、同時に力学的な系にエネルギーを与えることになる。これは公園にあるブランコを漕ぐことと同じ原理である。

まず、基準位置 \vec{r} から偏差 $\Delta\vec{r}$ ずれた場所での潮汐力による加速度 $\Delta\vec{g}$ は次の式で表される。

$$\Delta\vec{g} = \frac{d\vec{g}}{d\vec{r}_g} \Delta\vec{r}$$

ただし、重力加速度 \vec{g} とその微分 $d\vec{g}/d\vec{r}$ は次の式で示される。¹⁶

$$\vec{g} = -\frac{GM}{|\vec{r}_g|^3} \vec{r}_g$$

$$\frac{d\vec{g}}{d\vec{r}_g} = \frac{GM}{|\vec{r}_g|^5} \begin{bmatrix} 2x_g^2 - y_g^2 - z_g^2 & 3x_g y_g & 3z_g x_g \\ 3x_g y_g & 2y_g^2 - z_g^2 - x_g^2 & 3y_g z_g \\ 3z_g x_g & 3y_g z_g & 2z_g^2 - y_g^2 - x_g^2 \end{bmatrix}$$

従って、綱の張力 f_T は次の式で示される。

$$f_T = \frac{m_1}{l/2} \left(\frac{\vec{l}}{2} \right)^T \frac{d\vec{g}}{d\vec{r}} \left(\frac{\vec{l}}{2} \right)$$

$$= \frac{GMm_1 l}{2r_0^3} (3 \cos^2 \phi - 1)$$

ここで、綱の長さを、中心星からの潮汐力によって張力が強いときに、綱を縮め、逆に張力が弱いときに綱を延ばす。計算の簡略化のために、次に示すように、綱の長さを正弦波状に変化させることにする。

$$l = l_0 (1 - \alpha \sin 2\phi)$$

ただし、 l_0 は綱の長さの平均であり、 α は綱の制御量の全長との比である。全系に与えるエネルギー dE/dt は、

$$\frac{dE}{dt} = -2 \left\{ f_T \frac{d l}{dt} \right\}$$

となる。

全系に与えるエネルギーの 1 周回の平均 \widetilde{dE}/dt は、

$$\begin{aligned} \frac{\widetilde{dE}}{dt} &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{dE}{dt} dt \\ &= \frac{2}{T_0} \int_0^{2\pi} f_T l_0 \alpha \cos 2\phi d\phi \end{aligned}$$

$\alpha \ll 1$ より、

$$\begin{aligned} \frac{\widetilde{dE}}{dt} &\cong \frac{2\alpha GMm_1 l_0}{T_0 r_0^3} \int_0^{2\pi} \cos 2\phi (3 \cos^2 \phi - 1) d\phi \\ &= \frac{3\alpha GMm_1 l_0^2 \pi}{T_0 r_0^3} \end{aligned} \quad (3)$$

となる。

¹⁶ここでは J_2 項の効果はほとんど無視できるので、考慮していない。

A.5 エネルギーの授受

宇宙機と中心星の持つ力学的性質として、エネルギーの保存則について、考察する。エネルギーの保存則は、

$$\begin{aligned}
 E(\text{エネルギー}) &= \text{宇宙機の位置のエネルギー} + \text{宇宙機の軌道回転のエネルギー} \\
 &\quad + \text{宇宙機の自転のエネルギー} + \text{中心星の回転エネルギー} \\
 &= -\frac{2GMm_1}{r_0} + \frac{1}{2} \frac{(2m_1M)r_0^2}{2m_1+M} \left(\frac{d\theta_0}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 l^2}{2} \left(\frac{d\theta_S}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_C^2 \\
 \frac{dE}{dt} &= 0 + \frac{(2m_1M)r_0^2}{2m_1+M} \frac{d\theta_0}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta_0}{dt}\right) + \frac{1}{4} m_1 l^2 2 \frac{d\theta_S}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta_S}{dt}\right) + I_C \omega_C \frac{d\omega_C}{dt} \\
 &= \frac{\left\{ \left(\frac{(2m_1M)r_0^2}{2m_1+M} + 2m_1 l^2 \right) \frac{d\theta_0}{dt} - \left(\frac{(2m_1M)r_0^2}{2m_1+M} + m_1 l^2 \right) \omega_C \right\}}{\frac{(2m_1M)r_0^2}{2m_1+M} \frac{d\theta_0}{dt}} \frac{(2m_1M)r_0^2}{2m_1+M} \frac{d\theta_0}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta_0}{dt}\right) \\
 &\cong \frac{(2m_1M)r_0^2}{2m_1+M} \frac{d\theta_0}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta_0}{dt}\right) \\
 &= \frac{d}{dt} (\text{宇宙機の軌道回転エネルギー}) \tag{4}
 \end{aligned}$$

と示される。ただし、

$$|\omega_C| \ll \left| \frac{d\theta_0}{dt} \right|$$

である。

式4から、BOLA から与えるエネルギーのほぼ100%が軌道エネルギーに使われていることが判る。式3と式4から、

$$\alpha \cong \frac{15a_c^2 J_2}{8r_0^2} \sin 2\psi \tag{5}$$

という近似式が得られる。

A.6 近似式による概算とシミュレーション結果の比較

式2に $r_0 = 7000\text{km}$ 、 $l = 100\text{km}$ と $\psi = \pi/4$ を代入すると da/dt は1日当たり 336.36m という結果が得られる。これはシミュレーションによる結果の1日当たり 338m とほぼ等しい。さらに、制御の効果が網の長さの自乗に比例し、位相差 ψ に対して、 $\sin 2\psi$ で影響すること、シミュレーション結果と等しくなる。

また、式5に $\psi = \pi/4$ を代入すると α は 1.685×10^{-3} となり、 $l = 100\text{km}$ では、網の伸び縮み αl は 168.5m という結果が得られる。これは、シミュレーションによる結果である約 140m とほぼ等しい。¹⁷

¹⁷シミュレーションでは、網の伸び縮みを正しく正弦波状に制御できなかった点に相違の原因がある。